نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۳/۹/۲**

وقت : **۷۵** دقیقه

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۲-فنی (۶ گروه هماهنگ)**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۹۴- ۱۳۹۳**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱ - معادله صفحه ای را بنویسید که از فصل مشترک دو صفحه $P_1 : 7x-4y+7z+16=0$ و $P_2 : 4x+3y-2z+13=0$ بگذرد و بر صفحه $P_3 : x-y-2z+5=0$ عمود باشد. **۱۰ نمره**

سوال ۲ - منحنی $r(t)=(t\cos t, t\sin t, t^2)$ روی چه سطحی (رویه ای) واقع است؟

آن را رسم کرده و انحنای منحنی را در نقطه $t=\pi$ به دست آورید. **۱۵ نمره**

سوال ۳ - الف) وجود حد تابع $f(x,y,z)=\dfrac{xy-yz}{x^2+y^2+z^2}$ را در نقطه $(0,0,0)$ بررسی کنید. **۱۰ نمره**

ب) اگر $z=f(u,v)$ ، $u=x^3-y^3$ و $v=x^4y^3$ ، مقدار $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ را به دست آورید. **۱۰ نمره**

سوال ۴ - ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=x^2-3xy+2y$ را روی ناحیه محدود به خطوط $x=y$ ، $x=1$ و $y=0$ را بیابید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

جواب سوال۱ : ابتدا معادله فصل مشترک دو صفحه P_1 و P_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{matrix} ۲ \\ ۷ \end{matrix}\begin{cases} ۷x-۴y+۷z+۵=۰ \\ ۴x+۳y-۲z+۶=۰ \end{cases} \to ۴۲x+۱۳y+۵۲=۰ \to x=-\frac{۱۳y+۵۲}{۴۲}$$

$$\begin{matrix} ۳ \\ ۴ \end{matrix}\begin{cases} ۷x-۴y+۷z+۵=۰ \\ ۴x+۳y-۲z+۶=۰ \end{cases} \to ۳۷x+۱۳z+۳۹=۰ \to x=-\frac{۱۳z+۳۹}{۳۷}$$

معادله فصل مشترک دو صفحه عبارت است از $x=-\frac{۱۳y+۵۲}{۴۲}=-\frac{۱۳z+۳۹}{۳۷}$ و یا : $L:\frac{x}{-۱۳}=\frac{y+۴}{۴۲}=\frac{z+۳}{۳۷}$

بردار نرمال صفحه مورد نظر بر بردار هادی این خط و بر بردار نرمال صفحه P_3 عمود است بنابر این

$$N=(۱,-۱,-۲)\times(-۱۳,۴۲,۳۷)=(۴۷,-۱۱,۲۹)$$

اکنون معادله صفحه شامل خط L و عمود بر صفحه P_3 برابر است با : $۴۷x-۱۱(y+۴)+۲۹(z+۳)=۰$

و یا : $۴۷x-۱۱y+۲۹z+۴۳=۰$

جواب سوال۲ : داریم $x=t\cos t\ ,\ y=t\sin t\ ,\ z=t^۲$ و در نتیجه $z=x^۲+y^۲$

بنابر این منحنی روی سهمیگون $z=x^۲+y^۲$ واقع است.

$$r'(t)=(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t,۲t)\ \to r''(t)=(-۲\sin t-t\cos t,۲\cos t-t\sin t,۲)$$

$$r'(\pi)=(-۱,-\pi,۲\pi)\ \to r''(\frac{\pi}{۲})=(\pi,-۲,۲)\ \to\ r'(\pi)\times r''(\pi)=(۲\pi,۲+۲\pi^۲,۲+\pi^۲)$$

$$|r'(\pi)\times r''(\pi)|=\sqrt{۴\pi^۲,(۲+۲\pi^۲)^۲+(۲+\pi^۲)^۲}=\sqrt{۸+۱۶\pi^۲+۵\pi^۴}$$

$$|r'(t)|=\sqrt{۱+\pi^۲+۴\pi^۲}=\sqrt{۱+۵\pi^۲}\qquad\to\qquad k(\pi)=\frac{\sqrt{۸+۱۶\pi^۲+۵\pi^۴}}{(\sqrt{۱+۵\pi^۲})^۳}$$

جواب سوال۳ : الف) تابع $f(x,y,z)=\frac{xy-yz}{x^۲+y^۲+z^۲}$ در نقطه $(۰,۰,۰)$ حد ندارد. دو مسیر متفاوت وجود دارد که مقادیر حد در آنها با هم برابر نیستند. اگر روی محور xها حرکت کنم داریم : $\lim\limits_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)}\frac{xy-yz}{x^۲+y^۲+z^۲}=\lim\limits_{(x,۰,۰)\to(۰,۰,۰)}\frac{۰}{x^۲}=\lim\limits_{x\to ۰}۰=۰$

اگر روی خط $x=y=-z$ حرکت کنیم داریم : $\lim\limits_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)}\frac{xy-yz}{x^۲+y^۲+z^۲}=\lim\limits_{(x,x,-x)\to(۰,۰,۰)}\frac{۲x^۲}{۳x^۲}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳}$

ب)

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-۳y^۲f_u+۳x^۴y^۲f_v$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}=-۳y^۲\frac{\partial f_u}{\partial x}+۱۲x^۳y^۲f_v+۳x^۴y^۲\frac{\partial f_v}{\partial x}$$

$$=-۳y^۲(\frac{\partial f_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})+۱۲x^۳y^۲f_v+۳x^۴y^۲(\frac{\partial f_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})$$

$$=-۳y^۲(۳x^۲f_{u^۲}+۴x^۳y^۳f_{uv})+۱۲x^۳y^۲f_v+۳x^۴y^۲(۳x^۲f_{vu}+۴x^۳y^۳f_{v^۲})$$

$$=-۹x^۲f_{u^۲}-۱۲x^۳y^۳f_{uv}+۱۲x^۳y^۲f_v+۹x^۶y^۲f_{vu}+۱۲x^۷y^۵f_{v^۲}$$

جواب سوال۴ : ابتدا داخل ناحیه را بررسی می‌کنیم. $f_x = ۲x - ۳y$, $f_y = -۳x + ۲$ اگر درون ناحیه اکسترمم موضعی موجود باشد باید $f_x = ۲x - ۳y = ۰$, $f_y = -۳x + ۲ = ۰$ که نتیجه می‌دهد $A_۱ : x = \frac{۲}{۳}$, $y = \frac{۴}{۹}$, $z = \frac{۴}{۹}$

روی خط $x = y$ داریم $f(x,x) = f_۱(x) = -۲x^۲ + ۲x$ و اگر $f_۱'(x) = -۴x + ۲ = ۰$ آنگاه

$$A_۲ : x = \frac{۱}{۲} , y = \frac{۱}{۲} , z = \frac{۱}{۲}$$

روی خط $y = ۰$ داریم $f(x,۰) = f_۲(x) = x^۲$ و اگر $f_۲'(x) = ۲x = ۰$ آنگاه $A_۳ : x = ۰ , y = ۰ , z = ۰$

روی خط $x = ۱$ داریم $f(۱,y) = f_۳(x) = -y + ۱$ و $f_۳'(y) \neq ۰$

در نقاط گوشه ای ناحیه هم داریم :

$$A_۵ : x = ۱ , y = ۱ , z = ۰ \text{ ، } A_۴ : x = ۱ , y = ۰ , z = ۱ \text{ ، } A_۳ : x = ۰ , y = ۰ , z = ۰$$

نقطه $A_۱$ ، نقطه مینیمم موضعی تابع است. مقدار ماکزیمم مطلق تابع در ناحیه داده شده برابر ۱ است که در نقطه $A_۴$ اتفاق می افتد و مقدار مینیمم مطلق تابع در ناحیه داده شده برابر ۰ است که در نقاط $A_۳$ و $A_۵$ اتفاق می افتد.

سیدرضا موسوی